Mathématiques Exercices

Option T

Durée : 4 heures

Exercice 1 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

1°) Déterminer le rang de A.
Calculer son polynôme caractéristique et ses valeurs propres.
Donner une base de chaque sous-espace propre (on choisira des vecteurs dont la première composante est égale à 1).

2°) On considère le système différentiel :

$$(1) \qquad \frac{dX}{dt} = AX$$

où X est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la solution X_0 de (1) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3°) Montrer que la courbe intégrale associée à X_0 est plane, et préciser une équation de son plan.
Pouvait-on, sans intégrer le système (1), prévoir que les courbes intégrales seraient situées dans des plans parallèles ?

Exercice 2 : On définit les séries de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de terme général :

$$u_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2}, \qquad v_n(t) = (-1)^n u_n(t), \qquad n \geq 1.$$

Pour tout réel $t \neq 0$ on désigne par f_t l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par les conditions suivantes :

1 - f_t est 2π - périodique,
2 - $f_t(x) = \operatorname{ch}(t\,x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1°) La somme de la série de fonctions Σu_n est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Et celle de la série de fonctions Σv_n ?

2°) Quelle est la somme de la série de Fourier de f_t ?
Calculer les coefficients de Fourier, a_0, a_n, b_n de f_t.

3°) Déterminer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t)$.

En déduire la valeur des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 3 : L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit C la courbe de représentation paramétrique :

$$x = \cos t \ , \quad y = \sin t \ , \quad z = t \ , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

On désigne par S la surface engendrée par les droites qui rencontrent l'axe $(O, \vec{k})$ et la courbe C et sont parallèles au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Vérifier que S admet pour représentation paramétrique :

$$x = u \cos t \ , \quad y = u \sin t \ , \quad z = t \ , \quad (t, u) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Déterminer un vecteur $\vec{n}(t, u)$, unitaire, normal à S au point de paramètres (t, u). S est-elle développable ?

2°) On définit une courbe Γ, tracée sur S, par une relation de la forme : $u = \varphi(t)$, où φ est une fonction de classe C^2. Déterminer φ de telle sorte qu'en tout point de Γ le plan osculateur soit tangent à S.
Que peut-on dire des courbes Γ ainsi obtenues ?

3°) Soit S_0 la portion de la surface S définie par les inégalités : $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq u \leq 1$.
Faire une figure représentant S_0. Calculer l'aire de S_0.

Exercice 4 : Soit D la partie de $\mathbb{R}^2$, $D = \{ (x, y) / x > 0 \}$.

On définit les applications r et t de D dans $\mathbb{R}$ par :

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \qquad t(x, y) = \frac{y}{x} \ .$$

On note E l'espace vectoriel des applications de classe C^∞ de D dans $\mathbb{R}$.
Si $f \in E$ on admettra qu'il existe $\tilde{f} \in E$, unique, telle que :

$$f(x, y) = \tilde{f}\,(r(x, y), t(x, y)) \ , \qquad \text{pour } (x, y) \in D \ .$$

Pour tout $f \in E$ on note Tf l'application de D dans $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$Tf(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \ .$$

1°) Vérifier que $T: f \to Tf$ est une application linéaire de E dans E.

2°) Soit $f \in E$. Exprimer Tf à l'aide de r, t, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}$. En déduire le noyau N_0 de T.

3°) Montrer que tout nombre réel α est une valeur propre de T et déterminer le sous-espace propre N_α associé.